به نام خدا

فرآیندهای تصادفی

- مفهوم کلی
- سیگنال فرآیند تصادفی
- تابع همبستگی فرآیند تصادفی

$$R_v(t_1,t_2) = E\{v(t_1)v^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v_1 v_2 f_{v_1 v_2}(t_1,t_2)\,dv_1\,dv_2$$

تابع همبستگی $R_x(t_1, t_2)$ نشان دهنده‌ی همبستگی متغیرهای تصادفی لحظات t_1, t_2 از فرآیند است.

* اگر به ازای هر t_1, t_2 خاص داشته باشیم $R_x(t_1, t_2) = 0$ آنگاه متغیرهای تصادفی لحظات t_1, t_2 هم عمود هستند.

$$x(t_1) \perp x(t_2)$$

* اگر به ازای $t_1 = t_2 = t$ به تابع همبستگی نگاه کنیم، داریم:

$$R_x(t, t) = E\{|x(t)|^2\} = P_x(t) = \text{قدرت لحظه‌ای فرآیند تصادفی } x(t)$$

قدرت متغیر تصادفی لحظه‌ای t از فرآیند

در ارتباط با یک فرآیند تصادفی تابع کواریانس به صورت زیر تعریف می شود.

$$C_v(t_1,t_2) = E\left\{ \left(v(t_1)-\bar{v}(t_1)\right)\left(v(t_2)-\bar{v}(t_2)\right)^* \right\}$$

متغیر تصادفی حاصل از مشاهدهٔ $v(t_1)$

برای یک متغیر تصادفی X، متغیر تصادفی حاصل از مشاهدهٔ آن به صورت

$$\tilde{X} = X - \bar{X}$$

تعریف می شود. همواره داریم

$$E\tilde{X} = 0 \quad = \quad E\tilde{X} - \bar{X} = 0$$

تابع کواریانس $C_x(t_1, t_2)$ نشان دهنده میزان ارتباط خطی بین متغیرهای تصادفی لحظه‌های t_1, t_2 از فرآیند x است و اگر به ازای هر t_1, t_2 خاص داشته باشیم

$$C_x(t_1, t_2) = 0$$

آنگاه می‌گوییم که متغیرهای تصادفی لحظات t_1, t_2 از فرآیند x متعامد هستند

یعنی هیچ رابطه خطی بین این دو متغیر تصادفی وجود ندارد.

* اگر به ازای $t_1 = t_2 = t$ به تابع کوواریانس نگاه کنیم، داریم

$$C_x(t_1, t_1) = E\left\{ |x(t) - \bar{x}(t)|^2 \right\} = Var_x(t)$$

واریانس متغیر تصادفی لحظه‌ی t از فرآیند را خواهیم داشت.

به همین دلیل، اگر از معیاری که نشان دهنده‌ی میزان انحراف متغیر تصادفی از مقدار میانگین خود است.

تمرین: ارتباط بین تابع همبستگی و تابع کوواریانس یک فرآیند تصادفی را به دست بیاورید.

$$C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - \bar{x}(t_1)\,\bar{x}(t_2)$$

به طریق مشابه برای دو فرآیند تصادفی $x(t)$ و $w(t)$ نیز توابع همبستگی متقابل و کوواریانس متقابل تعریف می‌شود.

* توابع همبستگی متقابل $x(t)$ و $w(t)$

$$R_{xw}(t_1, t_2) = E\{x(t_1) w^*(t_2)\}$$

نشان دهنده همبستگی متغیرهای لحظه‌ای t_1 فرآیند $x(t)$ و لحظه‌ای t_2 فرآیند $w(t)$ است.

$$\exists t_1, t_2 \; ; \; R_{xw}(t_1, t_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t_1) \perp w(t_2)$$

$$\forall t_1, t_2 \quad ; \quad R_{zw}(t_1, t_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad z(\cdot) \perp w(\cdot)$$

یعنی زمانی $z(t)$ و $w(t)$ متعامد هستند.

* تابع کوواریانس متقابل برای زمانی‌های $z(t)$ و $w(t)$

$$C_{zw}(t_1, t_2) = E\left\{ \left(z(t_1) - \bar{z}(t_1)\right) \left(w(t_2) - \bar{w}(t_2)\right)^* \right\}$$

نشان دهنده کوواریانس متقابل متغیرهای لحظات t_1 و t_2 از زمانی‌های $z(t)$ و $w(t)$ است که میزان ارتباط خطی آنها را نشان می‌دهد.

$$\exists t_1, t_2 \; ; \quad C_{zw}(t_1, t_2) = 0 \quad \Rightarrow z(t_1) \perp w(t_2)$$

$$\forall t_1, t_2 \; ; \quad C_{zw}(t_1, t_2) = 0 \quad \Rightarrow z(\cdot) \perp w(\cdot)$$

یعنی متراسیز $z(t)$ و $w(t)$ ناهمبسته هستند.

تمرین: رابطه بین همبستگی متقابل و کوواریانس متقابل را به دست بیاورید.

$$C_{zw}(t_1, t_2) = R_{zw}(t_1, t_2) - \bar{z}(t_1)\,\bar{w}^*(t_2)$$

$$\forall\, t_1, t_2 \;:\; C_{zw}(t_1, t_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; R_{zw}(t_1, t_2) - \bar{z}(t_1)\,\bar{w}^{*}(t_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; R_{zw}(t_1, t_2) = \bar{z}(t_1)\,\bar{w}^{*}(t_2)$$

$$\Leftrightarrow\; \mathcal{E}\underbrace{z(t_1)}_{x}\,\underbrace{w^{*}(t_2)}_{y} = \mathcal{E}z(t_1)\,\mathcal{E}w^{*}(t_2)$$

شرط استقلال

* مفهوم استقلال در فرآیند تصادفی

در فرآیند $X(t)$ و $W(t)$ را مستقل از هم می‌گوییم اگر هر بردار تصادفی از $X(t)$ مستقل از هر بردار تصادفی از $W(t)$ باشد.

* اگر در فرآیند تصادفی مستقل از هم باشند، ناهمبسته نیز خواهند بود. زیرا استقلال به معنی این است که هیچ ارتباطی بین متغیرهای تصادفی در فرآیند وجود ندارد، از جمله ارتباط خطی.

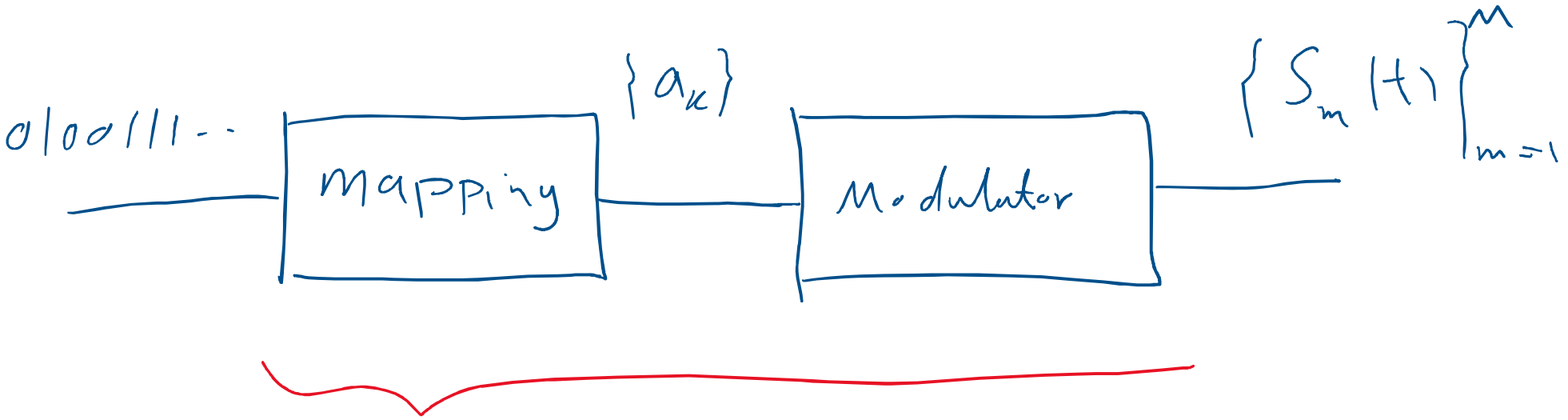
اما عکس این مطلب درست نیست و از ناهمبستگی در فرآیند تصادفی نمی‌توان استقلال آنها را نتیجه گرفت

فکر در مورد فرآیندهای تواماگویی.

مدولاسیون دیجیتال Digital Modulation

همان طور که گفتیم، مدولاتور دیجیتال، اطلاعات رشته بیت ارسالی را بررسی سعل موجهای مناسب با وضعیت کانال مدولی کند و روی کانال میفرستد، بسته گیرنده می فرستد. بنابراین مدولاسیون دیجیتال ای برآنیم که در دو بخش کلی تقسیم بندی کنیم در بخش اول، رشته بیت اطلاعات به سمبل های مناسب با وضعیت کانال و براساس

روش مدولاسیون مورد نظر، بصورتی تعریف و در بیت ارسال های مدله شده.
بر روی شکل سوال های حاصل مرتبی کنید.



Digital Modulation (M-ary)

در مدولاسیون M-ary ، براساس سمبل های ورودی $\{a_k\}$ یکی از

شکل‌موج‌های $\{S_m(t)\}_{m=1}^{M}$ انتخاب می‌شوند و به سمت گیرنده فرستاده می‌شوند. با توجه

به اینکه انتخاب $\{S_m(t)\}_{m=1}^{M}$ در حالت کلی به ضعف دقتی M بزرگ باشد، به طور مثال

با فاز، فاز پیوسته‌ای است، معمولاً از شکل موج‌های $\cos 2\pi f_c t$, $\sin 2\pi f_c t$

(f_c: فرکانس حامل) استفاده می‌کنیم و اطلاعات ارسالی $\{a_k\}$ یکی از ویژگی‌های (مثل

فاز، فرکانس یا ترکیبی از آنها) از شکل موج حامل تبعیت می‌کنند. به عبارت دیگر اطلاعات

ارسالی شکل موج حامل را مدوله می کند.

در این بخش می خواهیم مدولاسیون دامنه ای در باند پایه بررسی کنیم. به عبارت دیگر در این مدولاسیون، اطلاعات بر روی دامنه شکل موج حامل، قرار دارند.

$$S_m(t) = A_m\, g(t) \cos 2\pi f_c t \quad , \quad m = 1, 2, \ldots, M$$

مدولاسیون دامنه در باند میانی ASK (Amplitude shift keying)

این مدولاسیون در باند پایه نیز کاربرد دارد و به آن مدولاسیون PAM می‌گوییم:

Pulse Amplitude Modulation

$$S_m(t) = A_m \underbrace{p(t)}_{\text{پالس مستطیلی مناسب با وضعیت کانال انتخاب می‌شود.}} \quad , \quad m = 1, 2, \cdots, M, \quad 0 \le t \le T$$

T : بازه‌ی زمانی ارسال سمبل

بنابراین ترتیب یک سیگنال مدوله شده‌ی PAM به شکل زیر قابل بیان است

$$\sum_k a_k p(t - kT) = \sum_k a_k p(t - kD)$$

$T = D$: بازه‌ی زمانی بیت سمبل

که در آن $\{a_k\}$ حاوی اطلاعات هستند. به عبارت دیگر در یک مدولاسیون M-ary

M سطح مختلف در نظر گرفته می‌شود و هر سمبل ورودی یکی از این M سطح است

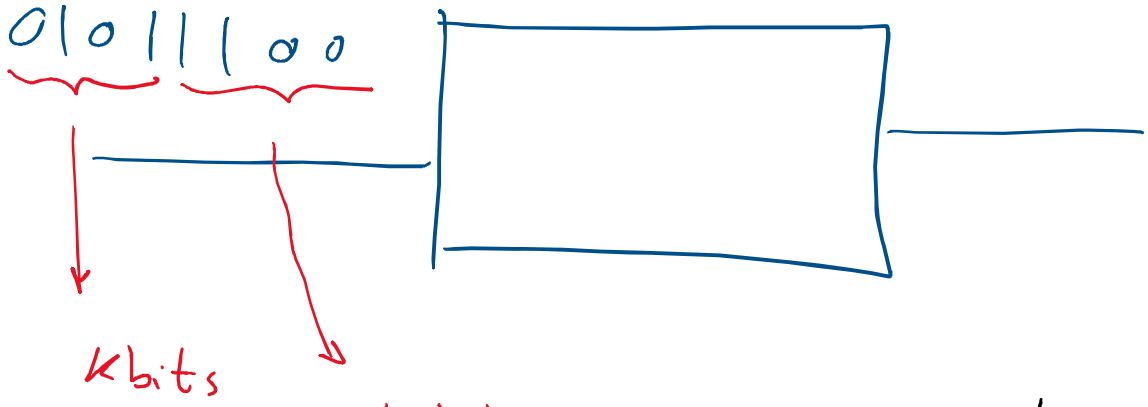
داده می‌شود.

$$M = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M\}$$

بنابراین M سمبل مختلف در دوردی می‌توانیم داشته باشیم که به هر سمبل یکی از سطوح $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_M\}$ براساس قانون Mapping مدولاتور دیجیتال اختصاص داده می‌شود. بنابراین طول سمبل‌ها در دوره‌ی مدولاتور برابر

$$k = \log_2^M$$

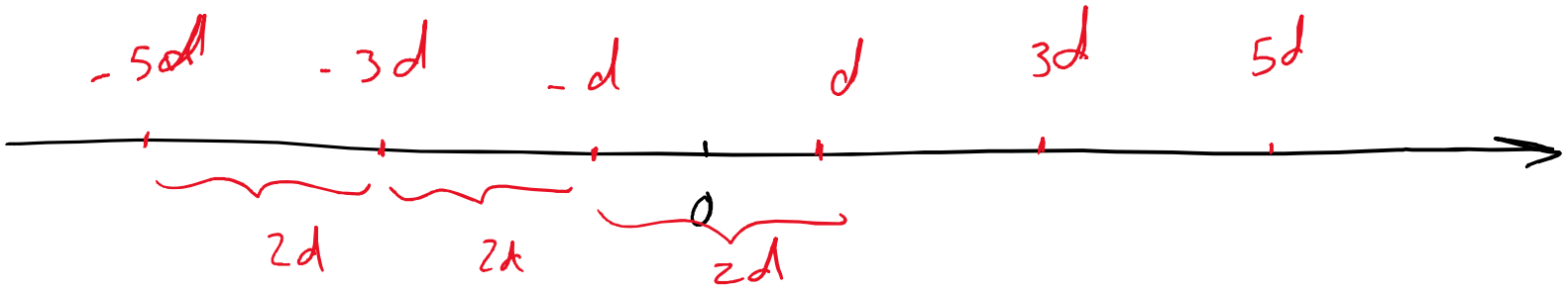
خواهد بود.



بنابراین در ورودی مدولاتور، رشته بیت اطلاعات به بلوک‌ها (سمبل‌های) با طول k دسته‌بندی می‌شوند و به هر سمبل یکی از سطوح $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M\}$ تخصیص داده می‌شود. در نتیجه رشته $\{a_k\}$ ساخته می‌شود.

در طراحی مدولاسیون ها، ترجیح بر این است که ساختار سیگنالینگ دارای تقارن باشد تا طراحی فرستنده و گیرنده و آنالیز آنها راحت تر انجام شود. به همین دلیل در مدولاسیون M-ary PAM سطوح مدولاسیون از مجموعه زیر انتخاب می شوند

$$M = \{(2m-1-M)d\}_{m=1}^{M} = \{\pm d, \pm 3d, \pm 5d, .., \pm(M-1)d\}$$



سطوح مدولاسیون دارای تفاوت عرض صفر

فاصله سطوح کنار، = 2d

در مدولاسیون M-ary PAM، دنباله‌ی بیتی به سمبل‌های کدبیتی

$\{\pm d, \pm 3d, \ldots, \pm (M-1)d\}$

تبدیل می‌شود و هر سمبل یکی از سطوح

اختصاص داده می‌شود.

0 | 0 0 | 1 | 0 0 | | 1 0 0

α_1 α_3 α_2

به طور کلی تخصیص سمبل ها به سطوح مدولاسیون، دلخواه است و روش‌هایی است که نحوه تخصیص بین فرستنده و گیرنده به اشتراک گذاشته شود. اما روش‌های خاصی برای این نحوه تخصیص وجود دارد که می‌تواند بر عملکرد مدولاسیون تأثیرگذار باشد.

این روش‌ها را در قالب چند مثال، بررسی می‌کنیم.

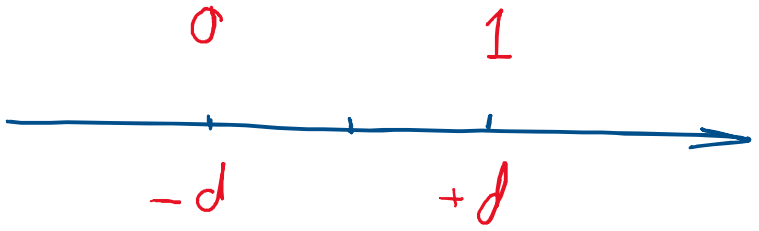
مثال - مدولاسیون M-ary PAM را برای $M=2, 4, 8$ بررسی کنید. سطوح مدولاسیون و نحوه تخصیص سمبل ها به بیت‌های ورودی را مشخص

کنید دنباله بیت زیر را مدوله کنید: 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0

الف) $M = 2$

$M = 2 \Rightarrow k = \log_2^M = 1$ ، $\mathcal{M} = \{\pm d\}$

سمبل ها	سطوح مدولاسیون
0	$-d$
1	$+d$



Constellation

0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0

$-d \quad d \quad d \quad d$

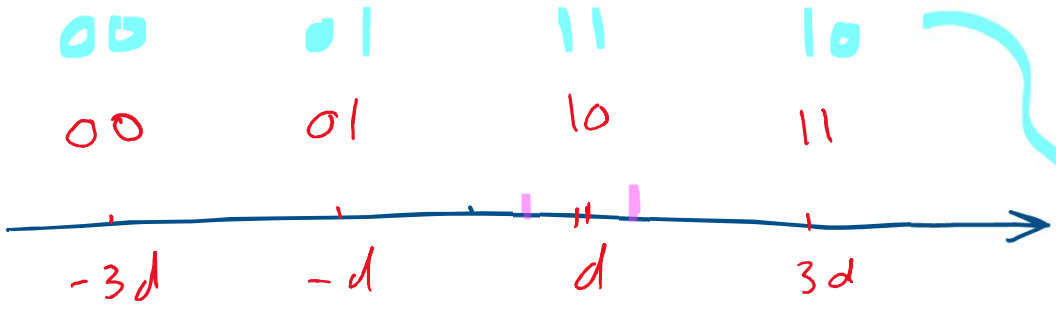
$$\sum_n a_n p(t-kD) \quad , \quad a_n \in \{\pm d\}$$

(به شرط $p(t)$ ، طبیعتا بهتر صحبت می‌کنیم!)

$M = 4$ (ب

$M = 4 \Longrightarrow k = \log_2^M = 2$, $\mathcal{M} = \{\pm d, \pm 3d\}$

$$\mathcal{M} = \{(2m-1-M)d\}_{m=1}^{4} ,$$



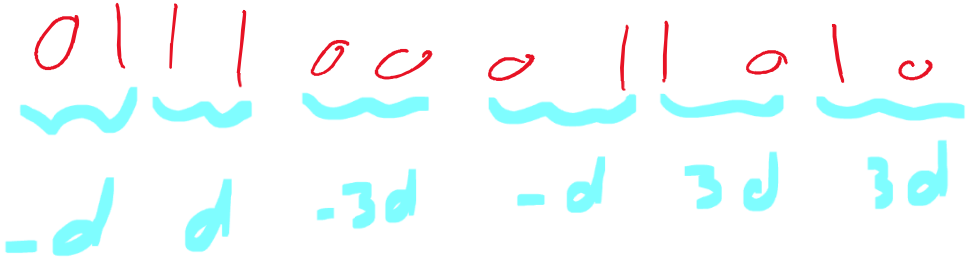
Constellation

Gray Coding

سمبل‌های ورودی	سطوح مدولاسیون (Natural Coding)	
00	-3d	00
01	-d	01
10	d	11
11	3d	10

می دانیم که بازیابی اطلاعات در گیرنده براساس بیشترین شباهت انجام می شود.
از طرف دیگر محتمل ترین خطا در حالتی است که یک سطح ارسالی را به اشتباه به
سطوح مجاور بازیابی کنیم. اگر در مدولاتور نحوه ی تخصیص سمبل ها به سطوح مدولاتور
به گونه ای باشد که سمبل های مجاور - سطوح مجاور فقط در یک بیت اختلاف داشته
باشند، در صورت بروز محتمل ترین خطا، به ازای هر خطای سمبل، فقط یک
خطای بیت خواهیم داشت و در نتیجه عملکرد احتمال خطای بیت، بهتر خواهد شد.

به این روش Gray Coding می‌گوییم.

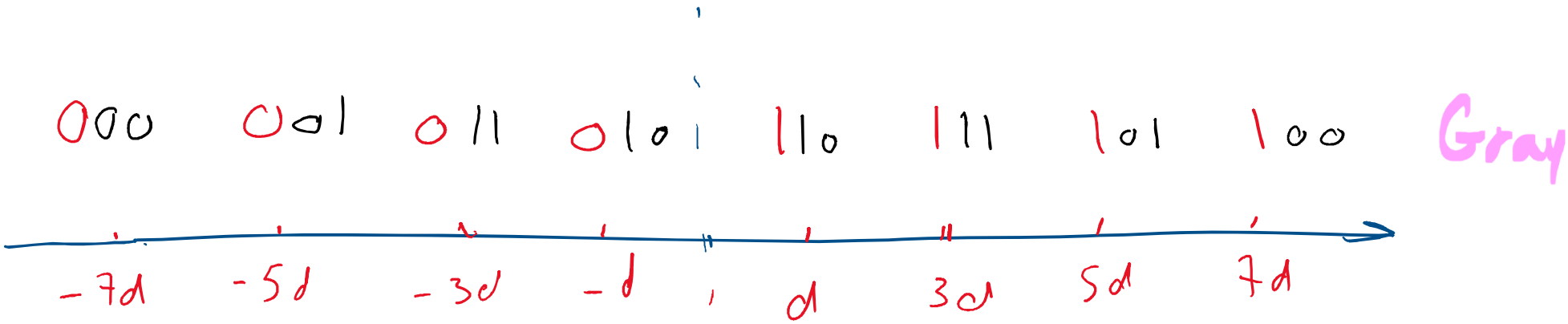


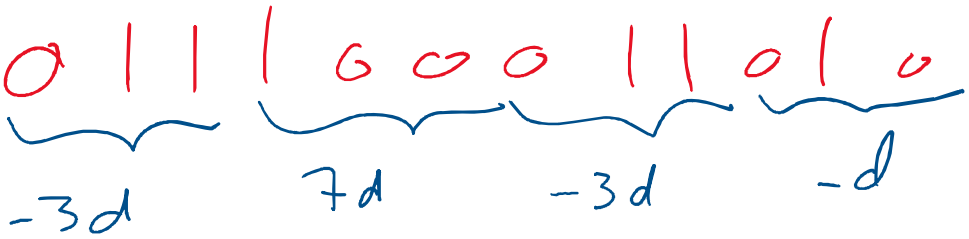
$M=8$ ب

$M=8 \Longrightarrow k=\log_2^M=3 \longrightarrow$ سیگنال‌های سه بیتی

0 0 0	
0 0 1	
0 1 0	
0 1 1	
1 0 0	
1 0 1	
1 1 1	
1 1 0	

$$\mathcal{M}=\{\pm d, \pm 3d, \pm 5d, \pm 7d\}$$


000 001 011 010 110 111 101 100
Gray
-7d -5d -3d -d d 3d 5d 7d


011 000 11 0
-3d 7d -3d -d